# Les fonctions continues

M1 – Chapitre 2

## I. Limites

| Définitions | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ | $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0 \mid \forall\, x \in I,$ | $a - r < x < a + r$ | $\lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$<br>$f(x) < \varepsilon$<br>$f(x) > \varepsilon$ | $si\ l \in R$<br>$si\ l = -\infty$<br>$si\ l = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ | | $a - r < x < a$ | | |
| $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ | | $a < x < a + r$ | | |
| $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$ | $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \mid \forall\, x \in I,$ | $A < x$ | | |
| $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$ | | $x < -A$ | | |

## II. Continuité

$$\boxed{f(x) \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

$f(x)$ continue sur $I$ si continue en tout point de $I$

## III. Caractérisation séquentielle des limites

$$(x_n) \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

## IV. Fonctions équivalentes

| Définition | Propriété |
|---|---|
| $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g} = 1}$ | $f'(a) \neq 0 \Rightarrow \boxed{f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)}$ |

| Equivalents usuels | | |
|---|---|---|
| $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ | $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ | $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ |
| $\sin x \underset{0}{\sim} x$ | | $\tan x \underset{0}{\sim} x$ |

## V. Limite d'une fonction monotone

$f$ croissante sur $]a; b[$

- $f$ majorée $\Rightarrow \lim_{x\to b} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- $f$ pas majorée $\Rightarrow \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

## VI. Image d'un intervalle

- $f$ continue sur $I \Rightarrow f(I)$ est un intervalle
- $f$ continue sur $[a; b] \Rightarrow f([a; b]) = [m; M]$ $\quad m = \min_{[a;b]} f(x) \quad M = \max_{[a;b]} f(x)$

## VII. Théorème des valeurs intermédiaires

$f$ continue sur $I = [a\,; b]$

$f(a) < 0\ et\ f(b) > 0 \Rightarrow \exists\, c \in I\ t.q.\ f(c) = 0$